

传递矩阵法的 $\hat{1}$ 误差分析尹一平¹, 王元汉²

(1. 第二炮兵指挥学院 二系, 湖北 武汉 430012; 2. 华中科技大学 土木工程与力学学院, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 在传递矩阵法的数值计算中,积分变量 $\hat{1}$ 可引起较大的误差.以轴对称问题的传递矩阵法为基础,将不含 $\hat{1}$ 的项和含 $\hat{1}$ 的项区分开来,在数值计算时分别采用两套传递矩阵:初始传递矩阵和修正传递矩阵,可将 $\hat{1}$ 引起的误差降至极小

关 键 词: 传递矩阵法; 初始传递矩阵; 修正传递矩阵

中图分类号: O 241.1 **文献标识码:** A

Analysis of error caused by $\hat{1}$ in Transferring Matrix MethodYIN Yi-ping¹, WANG Yuan-han²

(1. The Second Artillery Command College, Wuhan 430012, China;

2. College of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: On the basis of the transferring matrix method, which is an explicit solution for axisymmetric problem in layered elastic half space, the calculation method given in this paper can reduce the error, which is caused mainly by the integral variable $\hat{1}$. The terms can be divided into two kinds. One includes $\hat{1}$ and the other does not. For different cases, different transferring matrixes, should be chosen the modificatory transferring matrix and the preliminary transferring matrix according to whether the term contains $\hat{1}$ or not.

Key words: transferring matrix method; preliminary transferring matrix; modificatory transferring matrix

1 前 言

传递矩阵法^[1,2],概念清晰,公式简洁,能方便求解多层弹性半空间问题.文献[3]分析了由最下层弹性体的计算深度 Z_n 引起的误差,并提出了解决的办法.

但是,仅仅解决了 Z_n 引起的误差还不足以得到理想的高精度解.本文将文献[3]为基础,进一步分析并解决由积分变量 ξ 引起的误差.

本文仍以多层弹性半空间轴对称问题的为基础.只要求出了沉降 $w(r,z)$,则不难得出 $u(r,z)$, $\tau_{rz}(r,z)$, $\sigma_z(r,z)$ 等.

2 误差的原因

2.1 $\xi \rightarrow 0$ 时的计算溢出

设总传递矩阵为

$$B = G_n A \quad (1)$$

式中 G_n 为最底层(第 n 层)弹性体的传递矩阵; A 为

其他各层弹性体的传递矩阵之积:

$$A = \prod_{i=n-1}^1 G_i(E_i, \mu_i, z_i, \xi)$$

设边界条件:

$$z = 0 \text{ 时 } \tau_{rz}(r, 0) = 0, \sigma_z(r, z) \text{ 已知}$$

$$z \rightarrow \infty \text{ 时 } w(r, z) = u(r, z) = 0$$

则由文献[3]可得

$$\bar{w}(\xi, 0) = \frac{B_{21}B_{13} - B_{11}B_{23}}{B_{11}B_{22} - B_{21}B_{12}} \bar{\sigma}_z(\xi, 0) \quad (2)$$

由式(2)可得 $\bar{w}(\xi, 0)$ 的 Hankel 逆变换:

$$w(r, 0) = \int_0^\infty \bar{w}(\xi, 0) \xi J_0(\xi r) d\xi \quad (3)$$

仔细考察式(2),不难发现 $\bar{w}$ 含有一些 ξ 作分母的传递矩阵元素

$$G_{14} = \frac{1+\mu}{2(1-\mu)E\xi} [(3-4\mu)\text{sh}\xi z + \xi z \text{ch}\xi z]$$

$$G_{23} = \frac{1+\mu}{2(1-\mu)E\xi} [(3-4\mu)\text{sh}\xi z - \xi z \text{ch}\xi z]$$

收稿日期:2001-02-28

作者简介:尹一平,男,1972年生,硕士,从事岩土工程的教学与研究。

由式(3)中 ξ 的定义域可令上两式奇异,即不能很好地计算 $\bar{w}$ 。即使用 Gauss 数值积分或其他方法^[4]来尽量绕开 0 点,但当 Gauss 点个数较多时也会因为当 ξ 逼近 0 点时而产生计算溢出,且通过计算其精度不够理想。

2.2 $\xi \rightarrow \infty$ 时的计算溢出

由式(3)可知 ξ 的定义域为 $(0, \infty)$ 。数值计算时, ξ 虽不能也没必要取 ∞ , 但要得到 w 的精确值, ξ 也不能取值过小。而传递矩阵的元素至少是呈 ξz 的指数级增长,因此 ξ 较大时可能会导致计算溢出。

3 改进算法

3.1 解决 ξ 作分母的问题

主要在于 $\bar{w}$ 的算法改进。

定义由文献[2]给出的传递矩阵为初始传递矩阵 G 。另外,可以对初始矩阵进行修正,得出修正传递矩阵 G' 。修正传递矩阵 G' 的元素如下:

$$\left. \begin{aligned} G'_{14} &= \frac{1+\mu}{2(1-\mu)E} [(3-4\mu) \operatorname{sh} \xi z + \xi z \operatorname{ch} \xi z] \\ G'_{23} &= \frac{1+\mu}{2(1-\mu)E} [(3-4\mu) \operatorname{sh} \xi z - \xi z \operatorname{ch} \xi z] \\ G'_{31} &= -\frac{Ez\xi \operatorname{sh} \xi z}{2(1-\mu^2)E} \\ G'_{32} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} [\operatorname{sh} \xi z - \xi z \operatorname{ch} \xi z] \\ G'_{41} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} [\operatorname{sh} \xi z + \xi z \operatorname{ch} \xi z] \\ G'_{41} &= -G'_{31} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

修正传递矩阵 G' 的其他元素同初始传递矩阵 G 的相应元素一致。

通过对单层问题的推导,可得

$$\bar{w}(\xi, 0) = \frac{2(1-\mu^2)}{E\xi} \bar{\sigma}_i(\xi, 0) \quad (5)$$

仿此,可以对多层情形做猜想,认为它也能提出因式 $1/(E\xi)$ (这一设想事后经检验可行)。即对于式(2),认为分子各项可全提出 $1/(E\xi)$, 而分母中含 $1/(E\xi)$ 的项应全部原地“消化”。根据这一思路,分子中因式含 $1/(E\xi)$ 的,其系数持平;因式含 $1/(E^2\xi^2)$ 的,其系数应提取 $E\xi$;因式不含 $1/(E\xi)$ 的,其系数应提出 $1/(E\xi)$;分母中因式含 $1/(E\xi)$ 的,其系数提取 $E\xi$;因式含 $1/(E^2\xi^2)$ 的,其系数提取 $E^2\xi^2$;因式不含 $1/(E\xi)$ 的,其系数持平。

以文献[3]给出的因式和系数为依据,根据实际情况使用 G' 或 G 。具体思想是“面向对象,着情处理”,先搜索,后计算。

$$(1) \text{ 例 1 因式为 } \frac{1+\mu}{4(1-\mu)^2 E\xi} [(1-2\mu)(3-4\mu)],$$

系数为 $(A_{11}A_{43} - A_{41}A_{13}) + (A_{31}A_{23} - A_{21}A_{33})$ 。

该项出现在分子中。因式中已存在 $1/\xi$, 所以系数应持平。发现系数中含 $1/\xi$ 的地方用修正传递矩阵 G' , 没有 $1/\xi$ 的地方用初始传递矩阵 G 。

以 3 层为例。第 1 层传递矩阵为 C , 第 2 层传递矩阵为 D , 即 $A = DC$ 。则有:

$$\begin{aligned} A_{11}A_{43} &= \\ &0 + \overline{D_{42}}D_{11}C_{11}\underline{C_{23}} + D_{43}D_{11}C_{11}C_{33} + D_{44}D_{11}C_{11}C_{43} + \\ &D_{41}D_{12}C_{12}C_{13} + 0 + D_{43}D_{12}C_{12}C_{33} + D_{44}D_{12}C_{12}C_{43} + \\ &D_{41}D_{13}C_{31}C_{13} + D_{42}D_{13}\overline{C_{31}C_{23}} + 0 + D_{44}D_{13}C_{31}C_{43} + \\ &\overline{D_{41}D_{14}}C_{41}C_{13} + \overline{D_{42}D_{14}}\overline{C_{41}C_{23}} + D_{43}D_{14}\overline{C_{41}C_{33}} + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{41}A_{13} &= \\ &0 + D_{12}D_{41}C_{11}\underline{C_{23}} + D_{13}D_{41}C_{11}C_{33} + \underline{D_{14}}\overline{D_{41}}C_{11}C_{43} + \\ &D_{11}D_{42}C_{21}C_{13} + 0 + D_{13}D_{42}C_{21}C_{33} + \underline{D_{14}}\overline{D_{42}}C_{21}C_{43} + \\ &D_{11}D_{43}C_{31}C_{13} + D_{12}D_{43}\underline{C_{31}C_{23}} + 0 + \underline{D_{14}}D_{43}\overline{C_{31}C_{43}} + \\ &D_{11}D_{44}C_{41}C_{13} + D_{12}D_{44}\overline{C_{41}C_{23}} + D_{13}D_{44}C_{41}C_{33} + 0 \end{aligned}$$

$A_{11}A_{43}$ 和 $A_{41}A_{13}$ 的对角线项相同,故均用 0 计算。有 $\underline{G_{ij}}$ (含 $1/\xi$: G_{14} 和 G_{23}) 时总有 $\overline{G_{ik}}$ (分子含 ξ 因子: G_{31}, G_{32}, G_{41} 和 G_{42})。若有两个 $\underline{G_{ij}}$, 则必有两个 $\overline{G_{ik}}$ 与之匹配。计算之前先搜索,找到一个 $\underline{G_{ij}}$, 用两次修正传递矩阵 G' (例中一个下划线和一个上划线); 找到两个 $\underline{G_{ij}}$, 用四次 G' (例中两个下划线和两个上划线); 其余情况用初始传递矩阵 G 。

$$(2) \text{ 例 2 因式为 } \frac{(1+\mu)^2(3-4\mu)^2}{4(1-\mu)^2 E^2\xi^2}, \text{ 系数为 } A_{41}A_{32} - A_{42}A_{31}。$$

该项出现在分母中。系数应提取 $E^2\xi^2$, 所以必须先搜寻到两个或两个以上的 $\overline{G_{ik}}$ (这种情况只会出现三层及多层, 双层另详), 用两次修正传递矩阵 G' ; 对于多层地基, 则还可能出现 $\underline{G_{ij}}$, 此时必有 $\overline{G_{ik}}$ 与之匹配, 即必须增加相应 G' 的次数。

$$A_{41}A_{32} =$$

$$0 + D_{42}' D_{31}' C_{12} C_{21} + D_{43}' D_{31}' C_{12} C_{31} + D_{44}' D_{31}' C_{12} C_{41} + \\ D_{41}' D_{32}' C_{22} C_{11} + 0 + D_{43}' D_{32}' C_{22} C_{31} + D_{44}' D_{32}' C_{22} C_{41} + \\ D_{41}' D_{33}' C_{32} C_{11} + D_{42}' D_{33}' C_{32} C_{21} + 0 + D_{44}' D_{33}' C_{32} C_{41} + \\ D_{41}' D_{34}' C_{42} C_{11} + D_{42}' D_{34}' C_{42} C_{21} + D_{43}' D_{34}' C_{42} C_{31} + 0$$

以上分析仅对三层而言,层数较多时,若还这样人工分析则很费力;此时可采用结构体类型,利用 C 语言编写程序,实现矩阵乘法的“先搜索,后计算”,效果较好。

3.2 计算 w

整理 w 的分子和分母,得

$$B_{21} B_{13} - B_{11} B_{23} = \frac{1}{E' \xi} \left\{ \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(3-4\mu)}{4(1-\mu)^2} \cdot \right. \\ \left[(A_{11} A_{43} - A_{41} A_{13}) + (A_{31} A_{23} - A_{21} A_{33}) \right] + \\ \frac{(1+\mu)(3-4\mu)}{2(1-\mu)} \cdot \\ \left[(A_{21} A_{43} - A_{41} A_{23}) + (A_{31} A_{13} - A_{11} A_{33}) \right] + \\ \frac{(1+\mu)^2(3-4\mu)^2}{4(1-\mu)^2 E'} [A_{31} A_{43} - A_{41} A_{33}] + \\ \left. \frac{3-4\mu}{4(1-\mu)^2} [A_{21} A_{13} - A_{11} A_{23}] \right\} = \frac{B^S}{E' \xi} \\ B_{11} B_{22} - B_{21} B_{12} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)(3-4\mu)}{4(1-\mu)^2} \cdot \\ \left[(A_{41} A_{12} - A_{42} A_{11}) + (A_{21} A_{32} - A_{22} A_{31}) \right] + \\ \frac{(1+\mu)(3-4\mu)}{2(1-\mu)} \cdot \\ \left[(A_{41} A_{22} - A_{42} A_{21}) + (A_{11} A_{32} - A_{12} A_{31}) \right] + \\ \frac{(1+\mu)^2(3-4\mu)^2}{4(1-\mu)^2} [A_{41} A_{32} - A_{42} A_{31}] + \\ \frac{3-4\mu}{4(1-\mu)^2} [A_{22} A_{11} - A_{21} A_{12}] = B_x$$

式中 $E' = 1.0$

将上面各式代入式(2)可得

$$\bar{w}(\xi, 0) = \frac{1}{E \xi} \frac{B^S}{B_x} \bar{\sigma}_z(\xi, 0) \quad (6)$$

将上式代入式(3)得

$$\hat{w}(r, 0) = \frac{1}{E} \int_0^\infty \frac{B^S}{B_x} \bar{\sigma}_z(\xi, 0) J_0(\xi r) d\xi \quad (7)$$

双层问题按多层问题分析,此时有:

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

在计算 B^S 和 B_x 时应该使用各层弹性模量对最底

层弹性模量的相对值。例如实际值 $E_1 = 1.6 \times 10^4$ MPa, $E_2 = 1.9 \times 10^4$ MPa, $E_3 = 1.1 \times 10^4$ MPa, $E_4 = 2.0 \times 10^3$ MPa, 则计算 B^S 和 B_x 时取 $E_1' = 8.0$, $E_2' = 9.5$, $E_3' = 5.5$, $E_4' = 1.0$, 仅计算式(7)时取实际值: $E_4 = 2.0 \times 10^3$ MPa。

3.3 解决 $\xi \rightarrow \infty$ 引起的计算溢出

当 $\xi z_i \geq 10$ 时, $\text{sh} \xi z_i = \text{ch} \xi z_i$ 。此时若将第 i 层的传递矩阵元素都除以相同的因子 $2\exp(\xi_i z)$, 式(5)的结果不变, 即计算时所有的传递矩阵元素都不含 $\text{sh} \xi z$ 和 $\text{ch} \xi z$ 。例如:

$$G_{23} = \frac{1+\mu}{2(1-\mu)E\xi} [(3-4\mu) - \xi z]$$

$$G_{23}' = \frac{1+\mu}{2(1-\mu)E} [(3-4\mu) - \xi z]$$

$$G_{32} = \frac{E\xi}{2(1-\mu^2)} [1 - \xi z]$$

$$G_{32}' = \frac{E}{2(1-\mu^2)} [1 - \xi z]$$

4 算例分析

在地表作用圆形均布力 q , 其作用半径为 δ (m)。通过文献[3]消去计算深度 Z_n 引起的误差, 并运用本文方法降低了积分变量 ξ 的误差后, 传递矩阵法的数值实现变得非常可靠, 就能容易地求解成层弹性半空间轴对称地基的沉降 $w(r, z)$ 。文献[3]计算的实例如图 1 和图 2。

(1) 单层: $E = 1.0$ MPa, $\mu = 0.2$; 图 1 显示两组计算结果曲线重合, 且拐点出现在 $r/\delta = 1$ 处。

(2) 3 层: $\mu_1 = \mu_2 = 0.25$, $z_1 = \delta$, $E_2 = 0.2 E_1$, $z_2 = 2\delta$, $E = 0.1 E_2$, $\mu = 0.35$; 现将传递矩阵法计算的地表沉降与文献[5]的递推回代法计算的结果比较于图 2。

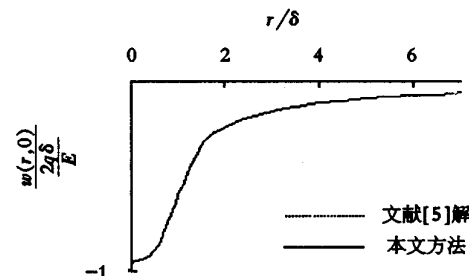


图 1 圆形均布荷载作用在单层地基时地表沉降
Fig.1 Surface settlement of a layer under vertical load uniformly distributed on a circular area

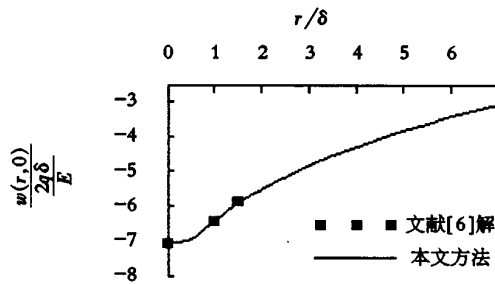


图2 圆形均布荷载作用在3层体系时地表沉降

Fig.2 Surface settlement of a 3-layer system under vertical load uniformly distributed on a circular area

5 结 论

(1) 先搜索,后计算。根据具体情况采用不同的传递矩阵元素,即初始的传递矩阵元素和修正的传递矩阵元素,从而将 ξ 引起的误差降至极小,且防止了计算溢出。

(2) 利用文中的思想和计算公式,笔者发现只要地基特性确定了,那么 B^s/B_x 就是恒值,与 ξ 无关。但是没有消去 Z_n 和 ξ 的误差的传递矩阵法计算出来的

B^s/B_x 的曲线紊乱,非定值。

(3) 根据文献[3]和本文结果,对传递矩阵法进行了误差分析,编制了相应的程序并在微机上获得通过,计算结果与其他方法一致。

(4) 轴对称问题传递矩阵法的误差分析思想可应用于非轴对称问题传递矩阵法的误差分析,有利于解决成层地基问题。

参 考 文 献

- [1] 钟阳,王哲人,郭大智. 求解多层弹性半空间轴对称问题的传递矩阵法[J]. 土木工程学报,1992,25(6):37-43.
- [2] 尹一平,王元汉,朱建权. 成层地基轴对称问题的基本解[J]. 岩土力学,2001,22(2):156-158.
- [3] 尹一平,王元汉. 传递矩阵法的 Z_n 误差分析[J]. 岩土力学,2001,22(4):440-442.
- [4] 关治,陈景良. 数值计算方法[M]. 北京:清华大学出版社,1990.218-222.
- [5] 塞尔瓦杜雷(加),A P A. 范文田等译.土与基础相互作用的弹性分析[M]. 北京:中国铁道出版社,1984.11-12.
- [6] 王凯. N层弹性连续体系在圆形均布垂直荷载作用下的力学计算[J]. 土木工程学报,1982,15(2):65-76.

中国土木工程学会第九届土力学及岩土工程学术会议通知

(第一号通知 征文)

中国土木工程学会第九届土力学及岩土工程学术会议拟于2003年10月25~28日在北京召开,会议由中国土木工程学会土力学及岩土工程分会主办,清华大学承办,中国水利水电科学研究院、中国建筑科学研究院、北京市勘察设计研究院、铁道部铁道科学研究院协办。

会议将以岩土工程与可持续发展为主题,对我国近年来在土力学与岩土工程领域的最新研究进展进行广泛的学术交流。热忱欢迎在岩土工程各个领域的设计、设计、施工人员踊跃投稿。应征论文必须是没有发表过的有关岩土工程的理论、计算、重大工程实录及岩土工程中其他有意义的内容。同时也欢迎从事岩土工程领域的新材料、新技术、新设备的开发、生产和应用的相关公司及单位踊跃报名参加技术展览。会议期间还将举办展览:土力学及岩土工程分会大事记;黄文熙讲座撰稿人业绩展览;茅以升土力学及基础工程大奖获得者业绩展览。

会议专题

土的基本特性和测试技术;基础工程;地基处理;地下工程及深基坑;土工建筑物与边坡;土动力学及地震工程;环境岩土工程;岩土工程中的新技术与新材料;岩土工程中计算机应用;新世纪岩土工程与可持续发展。

会议之后于2003年10月29~31日由中国土木工程学会和岩土工程分会与日本地盘工学会共同举办中日岩土工程学术会议。

征文要求

2003年3月31日前提交论文全文,2003年5月31日前:返回是否录用或修改意见,2003年6月31日前提交修改后论文。

会议秘书处地址

北京市海淀区清华园 清华大学水利水电工程系 土力学及岩土工程分会秘书处 邮编 100084

联系人:张建红 胡黎明 联系电话:010-62792984 或 62785593 传真:010-62785593

E-mail: cismge@tsinghua.edu.cn

(中国土木工程网等友情连接)